

**1** نسط :  $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$

لدينا :  $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = \frac{\sin 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = 2$

**خلاصة :**  $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

**2** نبين أن :  $\frac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}{1 + \cos 2x + \cos 4x} = 2 \sin 2x$

لدينا :

$$\frac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}{1 + \cos 2x + \cos 4x} = \frac{\sin 2x + \sin 6x + \sin 4x}{1 + \cos(2(2x)) + \cos 2x} = \frac{2 \sin\left(\frac{2x+6x}{2}\right) \cos\left(\frac{2x-6x}{2}\right) + \sin 4x}{1 + 2 \cos^2(2x) - 1 + \cos 2x}$$

$$= \frac{2 \sin(4x) \cos(-2x) + \sin 4x}{2 \cos^2(2x) + \cos 2x} = \frac{\sin(4x) [2 \cos(-2x) + 1]}{\cos 2x [2 \cos(2x) + 1]} = \frac{\sin(4x)}{\cos 2x} = \frac{2 \sin(2x) \cos(2x)}{\cos 2x} = 2 \sin(2x)$$

**خلاصة :**  $\frac{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x}{1 + \cos 2x + \cos 4x} = 2 \sin 2x$

**1** حل المعادلة :  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

لدينا :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[ \cos\left(\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) + \cos\left(\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) \right] = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left[ \cos(2x) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$



**خلاصة :** مجموعة حلول المعادلة هي :  $S = \left\{ x = \frac{\pi}{6} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} - k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

**1.** أوجد قيمة  $\sin 2\alpha$  ثم استنتج قيمة  $\alpha$ .

$$\text{لدينا : } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{خلاصة : } \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$$

نستنتج قيمة  $\alpha$  :

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2\alpha = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \text{ : لدينا}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{12} \text{ : إذن } \alpha \in \left[ 0, \frac{\pi}{4} \right] \text{ و } \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ \alpha = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z} \text{ : لدينا}$$

$$\text{خلاصة : } \alpha = \frac{\pi}{12}$$

**2.** حل المعادلة :  $x \in [0, 2\pi]; (\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x = 0$

لدينا :

$$(\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2} \left[ \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \cos x + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \sin x \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \left[ \cos \frac{\pi}{12} \cos x + \sin \frac{\pi}{12} \sin x \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{12} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \cos \left( x - \frac{\pi}{12} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \left( x - \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \\ x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

الحلول التي تنتمي ل  $[0, 2\pi]$

بالنسبة للحل  $x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$  نضع  $0 \leq \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \leq 2\pi$  مع  $k \in \mathbb{Z}$  نحصل بعد الحسابات  $k = 0$  أما  $x = \frac{7\pi}{12}$ .

بالنسبة للحل  $x = -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi$  نضع  $0 \leq -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi \leq 2\pi$  مع  $k \in \mathbb{Z}$  نحصل بعد الحسابات  $k = 1$  أما  $x = \frac{19\pi}{12}$ .

**خلاصة :** مجموعة حلول المعادلة هي  $S = \left\{ \frac{7\pi}{12}, \frac{19\pi}{12} \right\}$

**1.** حدد  $D_f$  مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

لدينا : الدالتين :  $x \mapsto \sin x$  و  $x \mapsto \cos x$  معرفتين على  $\mathbb{R}$ . إذن الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  (مجموع و جداء دوال معرفة على  $\mathbb{R}$ ).

**خلاصة :** مجموعة تعريف الدالة  $f$  هي  $D_f = \mathbb{R}$ .

**2.** بين أن :  $f$  دورية و دورها  $T = \pi$ . ثم استنتج  $D_E$  مجموعة دراسة  $f$ .

- لدينا : لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  كذلك  $x + \pi \in \mathbb{R}$  و  $x - \pi \in \mathbb{R}$ .
- ليكن  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

لدينا :

$$\begin{aligned} f(x + \pi) &= 4 \cos^2(x + \pi) + \sqrt{3} \sin(x + \pi) \cos(x + \pi) + 3 \sin^2(x + \pi) - 4 \\ &= 4(-\cos x)^2 + \sqrt{3}(-\sin x)(-\cos x) + 3(-\sin x)^2 - 4 \\ &= 4 \cos^2(x) + \sqrt{3} \sin x \cos x + 3 \sin^2(x) - 4 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ومنه :  $f(x + \pi) = f(x)$

**خلاصة :**  $f$  دورية و دورها  $T = \pi$ .

استنتاج :  $D_E$  مجموعة دراسة  $f$ .

بما أن :  $f$  دورية و دورها  $T = \pi$  إذن :  $D_E = [0, \pi] \cap \mathbb{R}^+ = [0, \pi]$

**خلاصة :** مجموعة دراس  $f$  هي  $D_E = [0, \pi]$ .

**3.**

أ- نبين أن :  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 2 \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

لدينا :

$$f(x) = 4\cos^2(x) + \sqrt{3}\sin x \cos x + 3\sin^2(x) - 4 \Leftrightarrow f(x) = \underbrace{4\cos^2(x) + 4\sin^2(x)}_4 - \sin^2(x) + \sqrt{3}\sin x \cos x - 4$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 4 - \sin^2(x) + \sqrt{3}\sin x \cos x - 4$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sin x \left[ -\sin x + \sqrt{3}\cos x \right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2\sin x \left[ -\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x \right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2\sin x \left[ -\sin \frac{\pi}{6} \sin x + \cos \frac{\pi}{6} \cos x \right]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 2\sin x \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right)$$

ومنه :  $f(x) = 2\sin x \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right)$

**خلاصة :**  $f(x) = 2\sin x \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right)$

ب- حل المعادلة :  $f(x) = 0$  :  $x \in \mathbb{R}$  ومثل حلولها على الدائرة المثلثية .

لدينا :  $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ أو } \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \sin 0 \text{ أو } \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ أو } x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ أو } x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi ; k \in \mathbb{Z} \text{ أو } x = \frac{\pi}{3} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

**خلاصة :** مجموعة حلول المعادلة هي :  $S = \left\{ x = k\pi , x = \frac{\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

نمثل الحلول على الدائرة المثلثية :

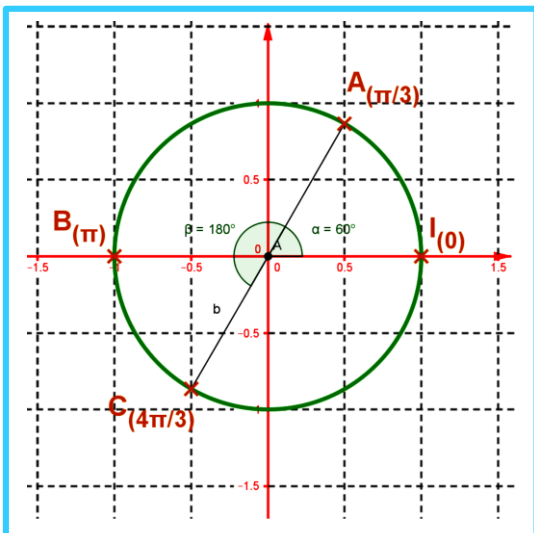
ت- حل المتراجحة :  $f(x) \leq 0$  :  $x \in [0, \pi[$

**4** حل المتراجحة :  $f(x) \leq 0$  :  $x \in [0, \pi[$

لدينا :  $x \in [0, \pi[ : f(x) \leq 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos \left( x + \frac{\pi}{6} \right) \leq 0$

بالنسبة ل  $\sin x$  :

على المجال  $]0, \pi[$  :  $\sin x > 0$  وتتعدم في  $x = 0$  .





بالنسبة ل  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

لدينا :  $x \in [0, \pi[ \Leftrightarrow 0 \leq x < \pi \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$

ومنه :  $\frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$  فإن  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 0$  أي  $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$  فإن  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 0$

.  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$  فإن  $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$  أي  $x = \frac{\pi}{3}$  فإن  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

.  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < 0$  فإن  $\frac{\pi}{2} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$  أي  $\frac{\pi}{3} < x < \pi$  فإن  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < 0$

لنعتبر جدول الإشارة التالي :

| x  | 0 | $\frac{\pi}{3}$ | $\pi$ |
|--|---|-----------------|-------|
| $\sin x$   | + | +               | +     |
| $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$                 | + | ○               | -     |
| $f(x) = 2 \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ | + | ○               | -     |

**خلاصة :** من خلال الجدول نستنتج أن مجموعة حلول المترابحة :  $S = \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

5.

أ- بين أن :  $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$   
لدينا :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2 \sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \\
 &= 2 \sin x \left[ \cos x \cos \frac{\pi}{6} - \sin x \sin \frac{\pi}{6} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x - \sin^2 x \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{\cos 2x - 1}{2} \quad ; \quad (\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \\
 &= \cos \frac{\pi}{6} \sin 2x + \sin \frac{\pi}{6} \cos 2x - \frac{1}{2} \\
 &= \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

**خلاصة :**  $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}$



ب- أحسب  $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$  ثم استنتج قيمتي  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$  و  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

$$(1) : f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$(2) : f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ من خلال (1) و (2) نحصل على :}$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \sin^2\frac{\pi}{12} = 1 - \left[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right]^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{ومنه : } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \text{ لأن } \frac{\pi}{12} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ إذن } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$$

$$\text{خلاصة : } \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \text{ و } \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

1. بين أن : إذا كانت A و B و C قياسات زوايا مثلث فإن  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \times \tan B \times \tan C$ .

لدينا ABC مثلث إذن : مجموع قياسات زواياه هي  $A + B + C = \pi$

و منه :  $A + B = \pi - C$

و بالتالي :

$$\tan(A + B) = \tan(\pi - C) \Leftrightarrow \frac{\tan(A) + \tan(B)}{1 - \tan(A)\tan(B)} = -\tan(C); \left(\tan(\pi - C) = -\tan(C)\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan(A) + \tan(B) = -\tan(C)[1 - \tan(A)\tan(B)]$$

$$\Leftrightarrow \tan(A) + \tan(B) = -\tan(C) + \tan(A)\tan(B)\tan(C)$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\tan(A) + \tan(B) + \tan(C)} = \overbrace{\tan(A)\tan(B)\tan(C)}$$

$$\text{ومنه : } \tan(A) + \tan(B) + \tan(C) = \tan(A)\tan(B)\tan(C)$$

$$\text{خلاصة : } \tan(A) + \tan(B) + \tan(C) = \tan(A)\tan(B)\tan(C)$$

تصحيح من طرف التلميذ : بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: علوم رياضية